Potenciación

La potenciación es una operación que permite escribir en forma abreviada una multiplicación de factores iguales.

$4^2 = 4 * 4 = 16$ *"cuatro elevado al cuadrado"*

$4^3 = 4 * 4 * 4 = 64$ *"cuatro elevado al cubo"*

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN	EJEMPLOS
• Para **multiplicar dos potencias de igual base**, se escribe la misma base y se suman los exponentes.	$3^2 * 3^3 = 3 * 3 * 3 * 3 * 3$ $= 3^{2+3} = 35$
• Para **dividir dos potencias de igual base**, se escribe la misma base y se restan los exponentes.	$2^5 : 2^2 = (2 * 2 * 2 * 2 * 2) : (2 * 2)$ $= 2^{5-2} = 23$
• Para calcular la **potencia de otra potencia**, se escribe la misma base y se multiplican los exponentes.	$(5^2)^3 = (5 * 5)^3$ $= (5 * 5) * (5 * 5) * (5 * 5)$ $= 5^{2 * 3} = 56$
• La potenciación es **distributiva** con respecto a la multiplicación y a la división.	$(4 * 3)^2 = 4^2 * 3^2$ $(12 : 4)^2 = 12^2 : 4^2$

Radicación

La radicación es la operación inversa a la potenciación.

$\sqrt{64} = 8$, porque $8^2 = 64$

Se lee "la raíz cuadrada de 64 es 8".

$^3\sqrt{27} = 3$, porque $3^3 = 27$

Se lee "la raíz cúbica de 27 es 3".

PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN	EJEMPLOS
• La radicación es **distributiva** con respecto a la multiplicación y a la división.	$\sqrt{9 * 16} = \sqrt{9} * \sqrt{16}$ $\sqrt{64 : 16} = \sqrt{64} : \sqrt{16}$
• Para **multiplicar o dividir raíces de igual índice**, se escribe una raíz con el mismo índice y con el radicando igual a la multiplicación o división de los radicandos dados, según corresponda.	$\sqrt{8} * \sqrt{2} = \sqrt{8 * 2}$ $3\sqrt{243} : 3\sqrt{9} = 3\sqrt{243 : 9}$

ACTIVIDADES:

1) Completen con V (Verdadero) o F (Falso).

a. $(5 + 3)^2 = 5^2 + 3^2$

b. $(5 * 3)^2 = 5^2 * 3^2$

c. $(8 - 4)^2 = 8^2 - 4^2$

d. $(8 : 4)^2 = 8^2 : 4^2$

e. $2^3 = 3^2$

f. $(2^7)^2 = 2^7 * 2^2$

2) Resuelvan aplicando propiedades, cuando sea posible.

a. $2^3 * 2^3 * 2 * 2^0 =$

b. $10^{12} : 10^{10} * 10 =$

c. $8^{43} : 8^{10} * 8^{25} : 8^{57} =$

d. $(3^2)^2 * 3^2 =$

e. $(10 * 2 : 5)^2 =$

f. $\sqrt{2} * \sqrt{18} =$

g. $\sqrt{75} : \sqrt{3} =$

h. $\sqrt[3]{5} * \sqrt[3]{25} =$

i. $\sqrt{81 * 16 : 4} =$

j. $\sqrt[3]{64 * 27 * 125} =$

Mínimo común múltiplo.

El **mínimo común múltiplo** (mcm) entre dos números es el menor de los múltiplos que tienen en común esos números, sin tener en cuenta el 0.

Algunos múltiplos de 4 son: 0, 4, 8, **12**, 16, 20, 24…

Algunos múltiplos de 6 son: 0, 6, **12**, 18, 24, 30, 36…

12 es el menor múltiplo que tienen en común.

mcm (4;6) = 12

Para hallar el mcm (12;30) se factorean los números y se eligen los factores para obtener el mínimo común múltiplo.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$12 = 3 * 2 * 2$ $\qquad$ $30 = 2 * 3 * 5$

$$12 * 30 = 3 * 2 * \underbrace{2 * \rlap{$\overbrace{}^{30}$}2 * 3}_{12} * 5$$

mcm (12;30) = $2^2 * 3 * 5 = 60$

Para calcular el mcm se multiplican los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

ACTIVIDADES:

1) Resuelvan.

- El médico le receto a Florencia tomar un antibiótico cada 8 horas y un analgésico cada 6 horas. ¿Cada cuantas horas debe tomar los dos medicamentos juntos?

2) Calculen el mcm entre 675, 540 y 180.

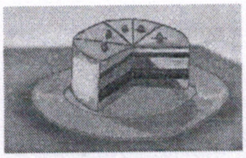
Números racionales. Números fraccionarios.

Números racionales

Los **números racionales** son aquellos que se pueden escribir como fracción.

Se denomina **fracción** al cociente entre dos números naturales *a* y *b* (con *b* distinto de 0).

5 ⟶ numerador
—
8 ⟶ denominador



Queda 5/8 de torta.

Toda fracción mayor que un entero se puede expresar como **número mixto**.

4/3 = 1 1/3

un entero   1/3

Un **número racional** es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$ donde *a* y *b* son números enteros, con *b* distinto de cero.

Todo número racional se puede expresar en forma de **fracción** o como **expresión decimal**. Para transformar una fracción en una expresión decimal se calcula el cociente entre el numerador y el denominador.

$\frac{3}{4} = 0{,}75$

Las expresiones decimales se clasifican en:

- **Exactas**: tienen un número finito de cifras decimales.

Una fracción irreducible tiene una expresión decimal exacta (E. D. E.), cuando los factores primos del denominador son potencias de 2, de 5 o de ambos.

$\frac{1}{5} = 0{,}2$ $\frac{3}{2} = 1{,}5$ $\frac{1}{10} = 0{,}1$

- **Periódicas**: tienen cifras decimales que se repiten infinitamente. Pueden ser **periódicas puras** (todas sus cifras decimales son periódicas) o **periódicas mixtas** (tienen una parte decimal no periódica seguida de otra periódica).

$1{,}\widehat{2} = \frac{12-1}{9} = \frac{11}{9}$

Para pasar una **expresión decimal periódica pura** (E. D. P. P.) a fracción se escriben en el numerador todas las cifras, periódicas y no periódicas, y se resta la parte no periódica. En el denominador se escriben tantos nueves como cifras tenga el período.

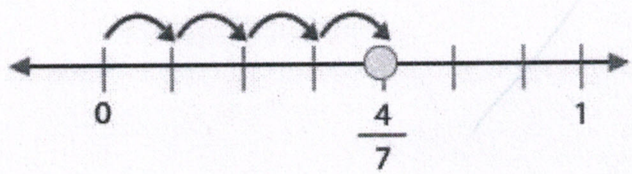
$0{,}2\widehat{3} = \frac{23-2}{90} = \frac{21}{90}$

Para pasar una **expresión decimal periódica mixta** (E. D. P. M.) a fracción, se escribe en el numerador la parte periódica y no periódica y se resta la parte no periódica. En el denominador se escriben tantos nueves como cifras periódicas, y ceros como cifras no periódicas tenga la expresión.

Representación en la recta numérica

Para **representar fracciones en la recta numérica**, se divide cada unidad en tantas partes iguales como indica el denominador y se toman tantas partes como indica el numerador.

Vamos a ubicar en la recta numérica la fracción $\frac{4}{7}$



Fíjate que la recta se dividió en 7 segmentos iguales, como indica el denominador.

La fracción se ubicó en el segmento 4, como indica el numerador.

Como el denominador de la fracción es 7, se divide cada unidad en siete partes iguales.

Como el numerador es 4, se toman 4 de esas partes.

Comparación de fracciones

Para **comparar dos fracciones**, se pueden usar distintos procedimientos.

• <u>Para comparar 1/4 y 5/6</u>: se multiplican cruzados los numeradores y denominadores, comenzando por el numerador de la primera fracción. Se escriben los resultados obtenidos y se los compara.

1/4 y 5/6 $\longrightarrow$ 1 * 6 < 4 * 5 $\longrightarrow$ 6 < 20, entonces 1/4 < 5/6.

• <u>Para comparar 1/3 y 1/7</u>: como los numeradores son iguales y en 1/3 se divide al entero en menos partes que en 1/7, entonces 1/3 > 1/7.

• <u>Para comparar 5/6 y 6/5</u>: como 5/6 es menor que un entero y 6/5 es mayor que 1, entonces 5/6 < 6/5.

Operaciones con números racionales

Adición y sustracción

Para **sumar** o **restar** dos o más fracciones de igual denominador, se debe colocar el mismo denominador y sumar o restar, según corresponda, los numeradores.

Ejemplo:

$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$

Para **sumar** o **restar** dos fracciones de distinto denominador, se buscan fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Para encontrar un denominador común, se busca el mínimo común múltiplo entre los denominadores.

Ejemplo.

$\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$

mcm (5;4) = 20

Multiplicación y división

Para **multiplicar** dos fracciones, se multiplican los numeradores y los denominadores entre sí.

Ejemplo:

$\frac{2}{5} * \frac{1}{4} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{20}}$ se simplifica dividiendo por 2 = $\frac{1}{10}$

Para calcular una **fracción de un entero**, se debe multiplicar el número por el numerador de la fracción y dividirlo por el denominador.

$\frac{3}{4}$ de 1000 = $\frac{3}{4} * 1000 = \frac{3*1000}{4} = \frac{3000}{4} = 750$

Toda fracción distinta de cero admite un **inverso multiplicativo**. Por ejemplo, el inverso multiplicativo de $\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3} * \frac{3}{2}$ porque = 1.

Para **dividir** dos fracciones, se multiplica la primera fracción por el inverso multiplicativo de la segunda.

$\frac{3}{4} : \frac{1}{12} = \frac{3}{4} * \frac{12}{1} = 9$

RESUMIENDO

Adición	Sustracción
$\frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$ *Equivalentes* 9 es el mcm entre 3 y 9.	$\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{8}{10} - \frac{5}{10} = \frac{3}{10}$ *Equivalentes* 10 es el mcm entre 5 y 2.
Multiplicación	**División**
$\frac{4}{5} \cdot \frac{10}{12} = \frac{\cancel{4}^{1} \cdot \cancel{10}^{2}}{\cancel{5}_{1} \cdot \cancel{12}_{3}} = \frac{2}{3}$ Antes de realizar la operación, se puede simplificar cualquier numerador con cualquier denominador.	$\frac{4}{9} : \frac{5}{6} = \frac{4}{\cancel{9}_{3}} \cdot \frac{\cancel{6}^{2}}{5} = \frac{8}{15}$ La división es igual a la multiplicación entre el primer número y el inverso multiplicativo del segundo.

Potenciación		Radicación
• $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$	• $\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$	• $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$
• $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$	• $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$	• $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$

La radicación también se puede escribir como exponente fraccionario.

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Propiedades

Para la **potenciación** y la **radicación** de números racionales se verifican las mismas propiedades que para los números enteros.

- Producto o cociente de potencias de igual base.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+1+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \qquad \left(\frac{5}{4}\right)^7 : \left(\frac{5}{4}\right)^2 : \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^{7-2-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

- Potencia de otra potencia.

$$\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^{-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2.(-1)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$$

- Simplificación de índices y exponentes.

$$\sqrt[6]{\left(\frac{3}{2}\right)^{15}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\cancel{15}^5}{\cancel{6}_2}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^5} \qquad \sqrt[3]{\left(\frac{7}{8}\right)^6} = \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{\cancel{6}^2}{\cancel{3}_1}} = \left(\frac{7}{8}\right)^2$$

- Producto o cociente de raíces de igual índice.

$$\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{2}} \qquad \sqrt[3]{\frac{3}{4}} : \sqrt[3]{\frac{2}{9}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4} : \frac{2}{9}}$$

- Raíz de otra raíz.

$$\sqrt{\sqrt[3]{\frac{729}{64}}} = \sqrt[2.3]{\frac{729}{64}} = \sqrt[6]{\frac{729}{64}}$$

ACTIVIDADES:

1) Resuelvan las siguientes operaciones:

a- $\frac{5}{2} + \frac{7}{2} - (\frac{1}{2} * 3) =$

b- $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} =$

c- $\frac{3}{2} * \frac{5}{7} + (\frac{3}{14} + 2) =$

d- $\frac{3}{7} : \frac{1}{3} =$

e- $\frac{5}{7} * \frac{3}{2} + \frac{9}{2} - \frac{3}{7} : \frac{1}{2} =$

2) Completen los cálculos.

a- $\frac{1}{3} + \boxed{} = \frac{8}{3}$

b- $\boxed{} - \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$

c- $\frac{17}{9} - \boxed{} = \frac{8}{9}$

3) Escriban <, > o = según corresponda.

a- $6 + \frac{4}{3}$ $\boxed{}$ 7

b- $5 - \frac{2}{5}$ $\boxed{}$ 3

c- $\frac{2}{4} + \frac{1}{2}$ $\boxed{}$ 1

4) Resuelva los siguientes problemas.

a- Camila gasta $\frac{1}{3}$ de su sueldo en impuestos y $\frac{1}{4}$, en el alquiler de su departamento. Si su sueldo es de $7.800, ¿cuánto dinero destina para alquiler e impuestos? ¿Qué parte de su sueldo le queda para otros gastos?

b- Eduardo llenó el tanque de nafta de su auto para salir de viaje. Luego de consumir la mitad del combustible, cargó nuevamente un tercio de la capacidad del tanque. ¿Qué parte del tanque tiene nafta?

Operaciones combinadas

Para resolver un cálculo combinando con radicales, se deben seguir estos pasos teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones y sus propiedades.

1. Se separa en términos.
2. Se resuelven las operaciones que hay en el radicando y en la base de la potencia respetando la jerarquía.
3. Se resuelven las potencias y las raíces.
4. Se resuelven las multiplicaciones y divisiones.
5. Se resuelven las sumas y restas.

EJEMPLO:

$(-0{,}7)^3 \cdot \frac{10}{21} \cdot 20 + \sqrt{0{,}\widehat{4}} : \frac{10}{11} - 1{,}0\widehat{5} =$

$\left(-\frac{7}{10}\right)^3 \cdot \frac{10}{21} \cdot 20 + \sqrt{\frac{4}{9}} : \frac{10}{11} - \frac{95}{90} =$

$-\frac{343}{1000} \cdot \frac{10}{21} \cdot 20 + \frac{2}{3} : \frac{10}{11} - \frac{95}{90} =$

$-\frac{49}{15} + \frac{22}{30} - \frac{19}{18} =$

$= -\frac{323}{90}$

1. Se separa en términos.
2. Se pasan las expresiones decimales a fracción.
3. Se resuelven las potencias y raíces.
4. Se resuelven las multiplicaciones y divisiones.
5. Se resuelven las sumas y restas.

El siguiente cálculo se puede resolver de dos formas diferentes.

$\sqrt{\frac{25}{16} \cdot \frac{36}{4}} - \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{7} - \frac{7}{4}\right) =$

$\sqrt{\frac{25}{16} \cdot \frac{36}{4}} - \frac{33}{28} =$

$\sqrt{\frac{225}{16}} - \frac{33}{28} =$

$\frac{15}{4} - \frac{33}{28} = \frac{18}{7}$

$\sqrt{\frac{25}{16} \cdot \frac{36}{4}} - \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{7} - \frac{7}{4}\right) =$

$\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} \cdot \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}} - \frac{5}{2} - \frac{3}{7} + \frac{7}{4} =$

$\frac{5}{4} \cdot \frac{6}{2} - \frac{5}{2} - \frac{3}{7} + \frac{7}{4} =$

$\frac{15}{4} - \frac{5}{2} - \frac{3}{7} + \frac{7}{4} = \frac{18}{7}$

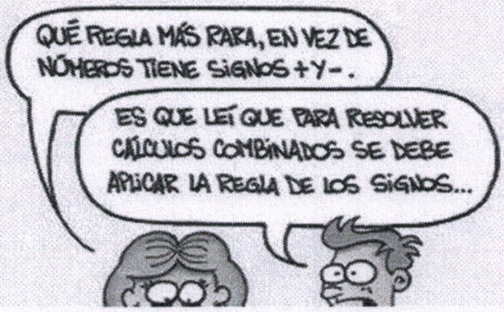
El siguiente cálculo se puede resolver aplicando propiedades de la potenciación y la radicación.

$\sqrt[4]{\left(\frac{2}{7}\right)^8} + \left(\frac{3}{2}\right)^{10} : \left(\frac{3}{2}\right)^8 - \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{\frac{10}{2}} =$

$\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{8}{4}} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \sqrt{\frac{25}{4}} =$

$\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \frac{9}{4} - \frac{5}{2} =$

$\frac{4}{49} + \frac{9}{4} - \frac{5}{2} = -\frac{33}{196}$



ACTIVIDADES:

Resuelvan.

a. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 3^{-2} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + 6\right) =$

d. $\frac{5}{6} \cdot 0{,}41\widehat{6} - 0{,}25 \cdot \left(2 - \frac{5}{4}\right) =$

b. $0{,}4 \cdot \frac{5}{4} + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2{,}1\widehat{6} =$

e. $\frac{3}{8} \cdot 0{,}\widehat{4} + \frac{5}{6} \cdot \left(1 - \frac{3}{2}\right) =$

c. $\frac{8}{5} \cdot \frac{5}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{8}{3} - \sqrt{\frac{16}{9}} =$

f. $\sqrt{\frac{25}{16}} \cdot 5^{-1} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6} - \frac{5}{2} =$